直升机不平衡旋翼动力学建模与轴心运动轨迹分析方法研究

张永杰[1],王浩东[1],曹康[1],李治权[2],宋来收[3]

(1. 西北工业大学民航学院,710072 西安;2. 中国航空研究院,100029 北京;
3. 南京航空航天大学航空学院,210016 南京)

摘　要: 研究了 Johnson 提出的倾转旋翼不平衡载荷前飞动力学模型,将其桨叶分析方法应用于直升机旋翼系统模态分析。在刚性条件假设下推导了直升机旋翼弹性阻尼和惯性力综合作用时桨叶的挥舞和摆振运动方程,给出了固定和旋转坐标系下对应的运动方程。通过引入均匀入流和线性扭转假设,获得了运动方程的理论解析解。利用叠加原理,得到了桨毂轴心运动方程;采用 Newmark 法进行振动微分方程求解,最终得到了直升机旋翼的轴心运动轨迹。以某型直升机旋翼系统为例,验证了本研究所提出旋翼桨叶模态分析方法的准确性,给出了兼顾计算精度和效率的最佳求解步长选取方法;预测了典型飞行状态下的桨毂轴心运动轨迹,为直升机旋翼系统设计提供了基础方法和技术参考。

关键词: 直升机旋翼;不平衡载荷;动力学建模;运动方程;轴心运动轨迹

中图分类号: TH135　　**文献标志码:** A

Research on dynamic modeling of helicopter unbalanced rotor and analysis method of axis motion trajectory

ZHANG Yongjie[1], WANG Haodong[1], CAO Kang[1], LI Zhiquan[2], SONG Laishou[3]

(1. School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, 710072 Xi'an, China; 2. Chinese Aeronautical Establishment, 100029 Beijing, China; 3. School of Aeronautics, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 210016 Nanjing, China)

Abstract: This paper studies the forward flight dynamic model of tilt rotor unbalanced load proposed by Johnson, and applies its blade analysis method to the modal analysis of helicopter rotor system. Under the assumption of rigidity, the flapping and shimmy motion equations of helicopter rotor blade under the combined action of elastic damping and inertial force are derived, and the corresponding motion equations in fixed and rotating coordinate systems are given. By introducing the assumption of uniform inflow and linear torsion, the theoretical analytical solution of the equation of motion is obtained. Then, using the superposition principle, the axial motion equation of the hub is obtained; Newmark method is used to solve the vibra-

收稿日期: 2021-12-06　　**修回日期:** 2022-04-26

基金项目: 国家级科项项目(No. 2019KF010059);国家自然科学基金资助项目(No. 11972301)

通信作者: 张永杰,教授,博士生导师。E-mail: zyj19191@nwpu.edu.cn

引用格式: 张永杰,王浩东,曹康,等. 直升机不平衡旋翼动力学建模与轴心运动轨迹分析方法研究[J]. 应用力学学报,2022,39(3):437-444.
ZHANG Yongjie, WANG Haodong, CAO Kang, et al. Research on dynamic modeling of helicopter unbalanced rotor and analysis method of axis motion trajectory[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2022, 39(3): 437-444.

tion differential equation, and finally the axis motion trajectory of helicopter rotor is obtained. Taking a helicopter rotor system as an example, the accuracy of the rotor blade modal analysis method proposed in this paper is verified, and the optimal solution step selection method considering both calculation accuracy and efficiency is given. The hub axis trajectory under typical flight state is predicted, which provides a basic method and technical reference for the design of helicopter rotor system.

Key words: helicopter rotor; unbalanced load; dynamic modeling; motion equation; axis motion track

由于直升机旋翼能够同时提供升力、操纵力和推进力，使得直升机具有垂直起降、机动性强、适用范围广等性能和优点，但是同时也存在着其特有的飞行稳定性问题[1-2]。直升机通过旋翼旋转在桨盘上下平面产生压力差进而产生升力，在前飞过程中，旋翼的气流状态为平飞来流、纵向压差气流和旋翼涡流的叠加，在桨盘平面上产生复杂的流动速度分布，并产生不均匀且周期性变化的气动力。在直升机飞行状态下，旋翼桨叶将围绕一个固定垂直轴转动，该轴称为桨毂旋翼转轴，其旋转中心称为旋翼轴心。在周期性变化气动载荷的影响下，旋翼桨毂轴心将偏离平衡点[2-3]。若桨毂轴心的运动随时间收敛，其振动幅度不断减小，且振动频率相对稳定，则直升机处于动稳定状态；若桨毂轴心偏离平衡点且旋转发散，振动幅度不断加大，将导致直升机机体发生强烈颤振，进而影响机体飞行性能，严重时会酿成机毁人亡的重大安全事故。因此，国内外学者对旋翼和桨叶的气弹耦合分析、振动和颤振机理、稳定性和动响应分析、减振优化设计、振动试验等多方面开展了大量卓有成效的研究。Nixon[3] 详细阐述了倾转旋翼的颤振机理，建立了倾转旋翼复合材料桨叶的气弹耦合模型，开展了桨叶气弹动响应和旋翼系统稳定性分析。王浩文等[4] 针对桨叶结构，提出了一种气动/惯性耦合的旋翼系统分析方法，给出了桨叶前飞状态下的非线性周期时变动力学方程及旋翼系统动响应。文献[5-6]则基于隐式多桨叶坐标转换方法，建立了一种前飞状态直升机旋翼/机体耦合动稳定性分析模型；并在此基础上，研究了直升机前飞空中共振时各自由度的相互作用，为揭示该共振物理本质奠定了坚实基础。王红州等[7] 针对某无轴承旋翼，利用混合优化策略开展了气弹动力学多目标优化设计，减振效果显著。文献[8-9]则分别针对螺旋桨桨叶和直升机模型桨叶开展了模态和颤振试验分析，给出了一些规律性的试验结论，为桨叶减振设计提供了有力技术支撑。

在系统总结和梳理前人研究成果的基础上，本研究基于 Johnson[10-11] 提出的四自由度模型，引入均匀入流和线性扭转的假设，获得了桨叶挥舞、摆振运动方程，利用叠加原理，得到了桨毂轴心运动方程，并使用 Newmark 法进行振动微分方程求解，最终得到了直升机旋翼的轴心运动轨迹。最后以某型直升机旋翼系统为例，计算了各个模态的响应形式和固有频率，并对照试验结果进行了计算误差评估。

1　直升机不平衡旋翼动力学建模

1.1　旋翼气动力模型

本研究采用叶素理论[12] 对旋翼气动力进行建模，将其分解为 1 个叶素(二维翼型)，依据普朗特升力线理论，叶素的受力示意如图 1 所示。以单独旋翼为研究对象时，通常定义 2 个坐标系：旋转坐标系和固定坐标系，2 个坐标系之间相差一个绕转轴的欧拉角(桨叶方位角)。旋转坐标系常用于描述单片桨叶的力关系，一般是波动的；而固定坐标系常用于描述整个桨盘的升力，一般是稳定的。

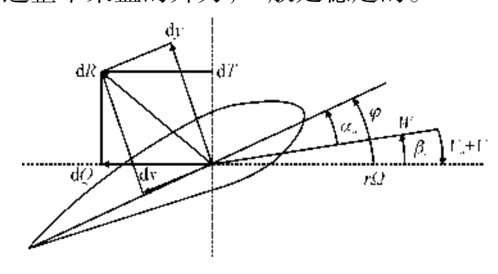


图 1　叶素受力示意图

Fig. 1 Force diagram of leaf element

图 1 中：dQ 和 dT 分别为 dR 在旋翼固定坐标系内水平和垂直方向上的分量，表示单个叶素产生的升力和阻力；β_0 为来流角；φ 为桨叶安装角；α_0 为迎角；r 为桨叶半径；Ω 为旋转角速度。

旋翼桨叶合速度为

$$U = \sqrt{U_T^2 + U_P^2} \tag{1}$$

式中 U_T、U_P 分别为叶素弦向和垂向速度。

定义升力 L 和阻力 D，θ 为操纵角，φ 为桨叶安

装夹角，则气动迎角 $\alpha=\theta-\varphi$，总气动力垂直于和平行于桨盘平面的分量分别为 F_z 和 F_x。升力和阻力的公式为

$$L=\frac{1}{2}\rho\,U^2 c\,C_L \tag{2}$$

$$D=\frac{1}{2}\rho\,U^2 c\,C_D \tag{3}$$

其中：c 为桨叶弦长；C_L 为翼型的升力系数；C_D 为翼型的阻力系数。

气动力在两个方向上分力的大小分别表示为

$$F_z=L\cos\varphi-D\sin\varphi \tag{4}$$

$$F_x=L\sin\varphi+D\cos\varphi \tag{5}$$

桨叶上作用的基元拉力、基元扭矩及基元功率可表示为

$$\mathrm{d}T=N_bF_z\mathrm{d}r \tag{6}$$

$$\mathrm{d}Q=N_bF_x\mathrm{d}r \tag{7}$$

$$\mathrm{d}P=\omega\mathrm{d}Q=\omega\,N_bF_x\mathrm{d}r \tag{8}$$

式中：N_b 为桨叶个数；r 为桨叶半径；ω 为桨盘旋转角速度；P 为功率。通过对上述基元载荷进行积分即可得到旋翼的整体作用力。

1.2 旋翼轴心运动分析

在刚性条件下，桨叶的挥舞运动方程[12]可写为

$$I_\beta^*(\ddot{\beta}+\nu_\beta^2)-2I_{\beta\xi}^*\beta\xi+I_{\beta a}^*(\ddot{\alpha}_x+2\dot{\alpha}_y)\sin\varphi_m-(\ddot{\alpha}_y-2\dot{\alpha}_x)\cos\varphi_m+S_\beta^*\ddot{z}_h=\gamma\int_0^1\eta_\beta\frac{F_z}{ac}\mathrm{d}r=\gamma M_F \tag{9}$$

其中 I_β^* 是量纲归一化旋翼的挥舞惯性矩，写为

$$I_\beta^*=\frac{I_\beta}{I_b},\quad I_b=\int_0^R mr\mathrm{d}r \tag{10}$$

式中：m 表示桨叶微段质量；γ 为旋翼洛克数，数值等于气动力和惯性力的比值；ν_β 为旋翼的挥舞自然频率，对于铰接式旋翼约为 1/rev。

相应地，桨叶的挥舞运动方程在旋转坐标系下可表达为

$$\beta=\beta_0+\sum\nolimits_0^\infty(\beta_{nc}\cos n\psi+\beta_{ns}\sin n\psi) \tag{11}$$

式中：β_0 为稳态锥度角；β_{nc} 和 β_{ns} 为桨叶叶尖平面偏离挥舞平面的角度；ψ 为桨叶方位角。由于高阶谐波分量反映了桨尖轨迹平面的翘曲模态，故描述直升机前飞挥舞运动时，主要用一阶 β_{1c} 和 β_{1s} 表示。

同理，在刚性和柔性条件下，旋翼摆振运动方程分别可表达为

$$I_\xi^*(\ddot{\xi}+\nu_\xi^2\xi)+2I_{\beta\xi}^*\beta\dot{\beta}=\gamma\int_0^1\eta\frac{F_x}{ac}\mathrm{d}r \tag{12}$$

$$\xi=\xi_0+\sum\nolimits_0^\infty(\xi_{nc}\cos n\psi+\xi_{ns}\sin n\psi) \tag{13}$$

其中：a 为升力线系数；ξ_0 为旋翼的平均摆振角，反映了旋翼上的合扭矩对旋翼的作用效果；ξ_{1c}、ξ_{1s} 为旋翼整体的偏移，是旋翼对周期性扭矩的响应。一般只考虑 ξ_{1c}、ξ_{1s}。

于是，在固定坐标系下，旋翼挥舞运动方程可进一步写为

$$I_\beta^*[\ddot{\beta}+\nu_\beta^2\beta_0]-2I_{\beta\xi}^*\beta\dot{\xi}_0+S_\beta^*\ddot{z}_h=\gamma M_{F0} \tag{14}$$

$$I_\beta^*[\ddot{\beta}_{1c}+2\dot{\beta}_{1s}+(\nu_\beta^2-1)\beta_{1c}]-2I_{\beta\xi}^*\beta(\dot{\xi}_{1c}+\xi_{1s})-I_{\beta a}^*(\ddot{\alpha}_y-2\dot{\alpha}_x)=\gamma M_{F1c} \tag{15}$$

$$I_\beta^*[\ddot{\beta}_{1s}-2\dot{\beta}_{1c}+(\nu_\beta^2-1)\beta_{1s}]+2I_{\beta\xi}^*\beta(\dot{\xi}_{1s}-\xi_{1c})-I_{\beta a}^*(\ddot{\alpha}_x+2\dot{\alpha}_y)=\gamma M_{F1s} \tag{16}$$

同理，在固定坐标系下，旋翼摆振运动方程可进一步写为

$$I_\xi^*(\ddot{\xi}+\nu_\xi^2\xi_0)-2I_{\beta\xi}^*\beta\dot{\beta}_0-I_{\xi a}^*\ddot{a}_z=\gamma M_{L0} \tag{17}$$

$$I_\xi^*[\ddot{\xi}_{1c}+2\dot{\xi}_{1s}+(\nu_\xi^2-1)\xi_{1c}]-2I_{\beta\xi}^*\beta(\dot{\beta}_{1c}+\beta_{1s})-I_{\beta a}^*(\ddot{\alpha}_y-2\dot{\alpha}_x)-S_\xi^*\ddot{y}_h=\gamma M_{L1c} \tag{18}$$

$$I_\xi^*(\ddot{\xi}_{1s}-2\dot{\xi}_{1c}+(\nu_\xi^2-1)\xi_{1s})+2I_{\beta\xi}^*\beta(\dot{\beta}_{1s}-\beta_{1c})-I_{\beta a}^*(\ddot{\alpha}_x+2\dot{\alpha}_y)+S_\xi^*\ddot{x}_h=\gamma M_{L1s} \tag{19}$$

其中：α_x、α_y、α_z 和 x_h、y_h、z_h 分别为桨毂轴心 3 个方向的角位移和线位移。

2 直升机旋翼轴心运动轨迹计算

2.1 运动方程求解过程

已知旋翼气动力的情况下，运动方程中 β_0 等稳态数值可通过迎角、桨盘倾角和挥舞角的几何关系求得。实际情形中，随着频率的增大，其谐波越来越低，对应的运动幅度也越来越小，只有前若干阶运动有实际意义，而后续的表达式均为控制桨叶的弯曲模态数值[12]。因此可以考虑使用前 n 级截断的方法，而后使用级数对比的方法求得 β_{nc} 和 β_{ns}。

桨毂力矩可表示为

$$\begin{pmatrix}\dfrac{-2C_{My}}{\sigma a}\\ \dfrac{2C_{Mx}}{\sigma a}\end{pmatrix}=\frac{I_\beta^*(\nu_\beta^2-1)}{\gamma}\begin{pmatrix}\beta_{1s}\\ \beta_{1s}\end{pmatrix} \tag{20}$$

其中：C_{My}、C_{Mx} 为对应的力矩系数；σ 为旋翼实度；a 为升力线系数；γ 为旋翼洛克数。通过式(14)可将桨叶的运动模态和受力状态联系起来，从而进

行计算。

针对铰接式旋翼，挥舞铰的刚性转动模态可表达为

$$\eta = \begin{cases} k(R-e_r), R \geqslant e_r \\ 0, R < e_r \end{cases} \tag{21}$$

式中e_r表示挥舞铰偏置量。于是，旋翼的拉力系数表示为

$$C_T = \frac{\sigma a}{2}\left[\frac{\theta_{0.7}}{3}\left(1+\frac{3}{2}\mu^2\right) - \frac{\theta_w}{8}\mu^2 - \frac{1}{2}(\lambda - \mu\,\theta_{1s}) - \frac{\mu}{2}\beta_{1c}\frac{e_r}{1-e_r}\right] \tag{22}$$

其中 λ 为桨叶流入比。另一方面，前文已经给出挥舞运动自然基阶频率的表达式，引入质量均匀假设，其结果可简化为

$$\nu^2 = 1 + \frac{3\,e_r}{2(1-e_r)} \tag{23}$$

即可将挥舞模态与旋翼所受的拉力相联系，摆振运动与此同理，对应的表达式分别为

$$C_Y = \frac{\sigma a}{2}\left[\frac{\theta_{0.7}}{3}\left(1+\frac{3}{2}\mu^2\right) - \frac{K-\theta_{\mathrm{con}}}{8}\mu^2 + \frac{1}{2}(\lambda - \mu\,\theta_{1c}) - \frac{\mu}{2}\beta_{1s}\frac{e_r}{1-e_r}\right] \tag{24}$$

对于系数周期为 T 的动力系统，可用如下形式描述为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x} + B(t)\boldsymbol{u} \tag{25}$$

满足条件

$$A(t+T) = A(t) \tag{26}$$

则其解可表达为

$$\boldsymbol{x}(t) = f(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(t,s)B(s)\boldsymbol{u}\mathrm{d}s \tag{27}$$

由指数函数的性质可知，周期系数方程必存在如下特解。

$$f(t,t_0) = \boldsymbol{P}(t)\mathrm{e}^{at} = \boldsymbol{Q}\,\mathrm{e}^{at}\boldsymbol{Q}^{-1} \tag{28}$$

这里矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 是矩阵 $\boldsymbol{P}$ 分解出的对角矩阵。

考虑其初始条件，令 X_R、X_P分别为$X'(0)=0$，$X(0)=1$和 $X'(0)=1$，$X(0)=0$ 两个状况下的特解，构造特征矩阵和特征方程为

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \dot{X}_R & \dot{X}_P \\ X_R & X_P \end{pmatrix} \tag{29}$$

$$s^2 - (\dot{X}_R + X_P)s + (\dot{X}_R X_P - \dot{X}_P X_R) = 0 \tag{30}$$

其中就包含了对强迫输入量 $\boldsymbol{u}$ 的振动响应，即可获得旋翼在气动力作用下的各模态响应。

2.2 模态数据求解方法

求解过程是先根据机型数据，计算出旋翼在不同状态下所受到的总体力和力矩，计算出旋翼桨叶的前几阶固有模态；然后采用 Newmark 法[12-13]进行迭代求解，计算得到旋翼桨叶的响应，将其叠加得到旋翼轴心运动轨迹[14]；使用相关软件输出其运动图像，根据图像的具体情况来直观判断运动是否发散，若发散则分析其具体发散模态，若未发散，则说明旋翼工作正常。

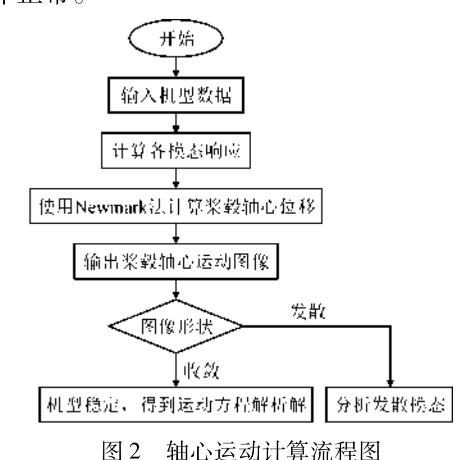


图 2　轴心运动计算流程图

Fig. 2　Flow chart of axial motion calculation

在已知直升机旋翼质量和刚度分布的情况下，可采用牛顿法、有限元法等求解旋翼的挥舞、摆振、扭转等固有特性，为下一步轴心运动轨迹计算提供输入。下面以牛顿法为例，介绍旋翼固有频率计算过程。

旋翼挥舞运动的控制微分方程一般写为

$$(E\,J_\beta y'')'' - (N\,y')' + m\ddot{y} = 0 \tag{31}$$

其中：$E\,J_\beta$为桨叶刚度；N 为桨叶上的离心力；m 为桨叶微段质量；y 为桨叶刚体位移。

此方程可使用分离变量法求解，或直接借助计算机工具数值求解。此处采用分离变量法求解，将其分离变量后积分两次，可得

$$\int_0^R E\,J_\beta\,(y_i'')^2\mathrm{d}r + \int_0^R N\,(y_i')^2\mathrm{d}r - \omega_{\beta i}^2\int_0^R m y_i^2\mathrm{d}r = 0 \tag{32}$$

若第 i 阶广义刚度和广义质量写为

$$K_i = \int_0^R E\,J_\beta\,(y_i'')^2\mathrm{d}r + \Omega^2\int_0^R (y_i')^2\mathrm{d}r\int_r^R m\eta\mathrm{d}\eta \tag{33}$$

$$M_i = \int_0^R m y_i^2\mathrm{d}r \tag{34}$$

则旋翼的第 i 阶挥舞固有频率为

$$\omega_{\beta_i}^2 = \frac{K_i}{M_i} \tag{35}$$

将相关数据带入 1.2 节挥舞摆振运动控制方程，可以获得铰接和无铰（柔性）式旋翼的边界

条件为

$$y(0)=0,\quad y''(R)=0,\quad y''(0)=0 \tag{36}$$

$$y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y'(R)=0 \tag{37}$$

容易求得旋翼挥舞的0阶固有频率为

$$\omega_{\beta_0}=\sqrt{\left(1+L_{pj}\frac{M_{pj}}{I_{pj}}\right)\Omega^2} \tag{38}$$

式中：L_{pj}为桨叶的铰外伸量；I_{pj}为挥舞铰轴的静矩；M_{pj}为挥舞铰轴的惯性矩。

同理，可求得旋翼摆振和扭转运动控制微分方程的积分表达式和固有频率，此处就不再赘述。

2.3 轴心运动计算

本研究主要利用 Newmark 法[12-13]进行响应计算。在具体计算时，关键在于通过目标旋翼的运动向量和质量、阻尼、刚度矩阵，计算出稳态状态下桨根力矩表达式，令 $\psi=0$ 可得到桨叶在0°方位角时的各力初始值，可作为最初的力作用向量。为便于迭代计算，初始运动位置可设为位于预定的桨毂坐标原点，在时间单位化后即可获得在某个特定时间或特定时间段内的位移数据[14]。旋翼3方向质量刚度矩阵可由工程梁理论求得，带入样板直升机相关质量和惯性矩数据即可计算，相关推导如下。

桨叶弯矩和桨叶变形的本构关系式为

$$M_x(r)=EI\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}r^2} \tag{39}$$

对应的弯曲运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}EI\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}r^2}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\int_e^R m\Omega\rho\mathrm{d}\rho\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)-m\Omega^2x+m\ddot{x}=F \tag{40}$$

另一方面，将前文得到的各模态数据求出，即可求得桨叶整体的运动方程，进而求出桨毂轴心的运动轨迹，相应的坐标变换为

$$\begin{bmatrix}X\\Y\\Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta\\\xi\\\theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_x\\\alpha_y\\\alpha_x\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\0\\c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\c\\0\end{bmatrix} \tag{41}$$

将上述各式联立，以矩阵形式输入相关机型数据，将气动力数据写成向量形式，作为前文中提到的 $\boldsymbol{u}$ 输入，即可获得其计算表达式。

3 直升机旋翼轴心运动分析与轨迹预测

3.1 旋翼桨叶模态求解分析

本研究中选取某型直升机作为对象进行算例分析，相关机型数据[13]如下表。

表1 某型直升机相关参数

Tab.1 Relevant parameters of a helicopter

旋翼数量	3片		
翼型	NACA0012		
桨叶挥舞惯性矩/(kg·m²)	3 891.198		
桨叶极惯性矩/(kg·m²)	15 727.489		
洛克数	8.1		
旋翼实度	0.085		
铰外伸量比	0.05		
机身三方向惯性矩/(kg·m²)	5 423.272	6 779.09	40 674.542
平飞叶尖速度/(m·s⁻¹)	198.12		
桨叶弦长/m	0.3		
桨盘半径/m	5.345		
扭度/(°)	-12.275		
扭转方式	线性扭转		

以上数据代入式(39)～式(41)，其相关模态固有频率数据求解如下。

表2 步长0.1的各模态计算结果

Tab.2 Calculation results of each mode with steps 0.1

模态名称	实测值/Hz	步长0.1计算值/Hz	计算误差/%	计算时间/s
一阶挥舞	15.75	16.82	6.79	3.841
一阶摆振	19.51	21.37	9.53	4.677
一阶扭转	144.70	157.30	8.71	4.251
二阶挥舞	41.93	45.14	7.66	8.912
二阶摆振	54.68	58.99	7.82	10.022
二阶扭转	193.86	202.03	7.88	9.736
三阶挥舞	86.84	94.55	8.88	14.715
三阶摆振	97.74	103.15	8.60	16.814
三阶扭转	243.12	250.76	5.20	16.129

依据表2～表7的计算数据，将各模态在不同步长下计算所得相对误差及所需计算时间分别作图(图3～图4)，为了方便对比，在横轴绘制时未使用均匀刻度而使用了对数刻度。本研究6次计算所使用的步长分别为：0.1、0.05、0.01、0.005、0.001、0.000 5。对比数据发现，计算得到的模态固有频率比实测值偏大，主要由于简化条件引起的系统误差。观察图3和图4可知：随着计算步长减小，前三阶模态计算值也越来越逼近实测值，但计算时间也逐渐增加；在计算步长减小到0.01以后，前三阶模态计

算误差已减小到5%以下,且计算误差变化很小。

表 3　步长 0.05 的各模态计算结果

Tab. 3　Calculation results of each mode with steps 0.05

模态名称	实测值/Hz	步长 0.05 计算值/Hz	计算误差/%	计算时间/s
一阶挥舞	15.75	16.44	4.38	9.772
一阶摆振	19.51	20.82	6.71	11.457
一阶扭转	144.70	153.71	6.22	11.105
二阶挥舞	41.93	44.75	6.73	25.873
二阶摆振	54.68	58.91	7.74	28.124
二阶扭转	193.86	201.77	4.08	26.559
三阶挥舞	86.84	94.31	8.60	43.195
三阶摆振	97.74	102.58	4.95	44.827
三阶扭转	243.12	254.91	4.85	45.311

表 4　步长 0.01 的各模态计算结果

Tab. 4　Calculation results of each mode with steps 0.01

模态名称	实测值/Hz	步长 0.01 计算值/Hz	计算误差/%	计算时间/s
一阶挥舞	15.75	16.18	2.73	17.574
一阶摆振	19.51	20.20	3.54	19.130
一阶扭转	144.70	149.72	3.47	19.946
二阶挥舞	41.93	43.42	3.55	32.483
二阶摆振	54.68	56.55	3.42	35.801
二阶扭转	193.86	200.59	3.47	33.722
三阶挥舞	86.84	90.93	4.71	57.503
三阶摆振	97.74	101.47	3.82	55.390
三阶扭转	243.12	249.71	2.71	57.375

表 5　步长 0.005 的各模态计算结果

Tab. 5　Calculation results of each mode with steps 0.005

模态名称	实测值/Hz	步长 0.005 计算值/Hz	计算误差/%	计算时间/s
一阶挥舞	15.75	16.11	2.41	24.643
一阶摆振	19.51	20.11	3.08	23.182
一阶扭转	144.70	149.28	3.17	23.206
二阶挥舞	41.93	43.35	3.39	45.442
二阶摆振	54.68	56.54	3.40	42.160
二阶扭转	193.86	200.46	3.40	46.844
三阶挥舞	86.84	90.79	4.55	61.757
三阶摆振	97.74	100.91	3.24	69.708
三阶扭转	243.12	248.73	2.31	64.316

表 6　步长 0.001 的各模态计算结果

Tab. 6　Calculation results of each mode with steps 0.001

模态名称	实测值/Hz	步长 0.001 计算值/Hz	计算误差/%	计算时间/s
一阶挥舞	15.75	16.12	2.35	37.149
一阶摆振	19.51	20.09	2.97	39.626
一阶扭转	144.70	149.26	3.16	37.803
二阶挥舞	41.93	43.33	3.37	67.717
二阶摆振	54.68	56.49	3.35	64.465
二阶扭转	193.86	200.30	3.32	62.683
三阶挥舞	86.84	90.76	4.53	86.291
三阶摆振	97.74	100.88	3.18	80.090
三阶扭转	243.12	248.67	2.29	91.591

表 7　步长 0.000 5 的各模态计算结果

Tab. 7　Calculation results of each mode with steps 0.000 5

模态名称	实测值/Hz	步长 0.000 5 计算值/Hz	计算误差/%	计算时间/s
一阶挥舞	15.75	16.12	2.35	71.332
一阶摆振	19.51	20.09	2.97	87.644
一阶扭转	144.70	149.24	3.14	94.155
二阶挥舞	41.93	43.32	3.32	187.042
二阶摆振	54.68	56.49	3.31	173.125
二阶扭转	193.86	199.75	3.04	158.004
三阶挥舞	86.84	90.73	4.48	362.711
三阶摆振	97.74	100.85	3.18	329.415
三阶扭转	243.12	248.63	2.28	291.620

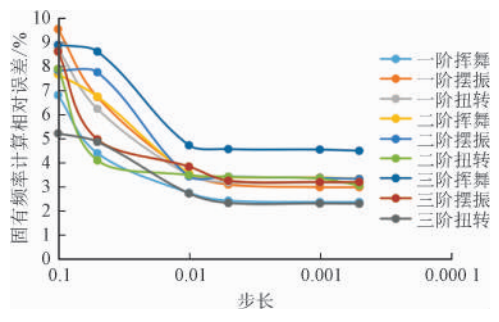


图 3　不同步长下的各模态固有频率计算误差

Fig. 3　Calculation error of natural frequency of each mode under different step size

为了进一步考察计算步长减小对计算精度提高与计算时间代价的影响,此处对表 2 ~ 表 7 的计算结果进行了进一步统计,给出了步长减小对计算误差与计算时间的影响分析表(见表 8)。表 8 中:$s_{i(i=1,2,3,4,5,6)}$ 代表 6 种不同的计算步长;$\bar{\varepsilon}_i$ 代表每种步长下前三阶模态计算值与实测值之间的平均计算误差;$\bar{t}_i$ 代表每种步长前三阶模态的平均计算时间,

单位是 s；$\Delta s_{i+1}=|s_{i+1}-s_i|$代表步长减少量；$\Delta\bar{\varepsilon}_{i+1}=|\bar{\varepsilon}_{i+1}-\bar{\varepsilon}_i|$代表随着步长的减小，每种步长相对前一种步长所带来的平均计算误差减少量；$\Delta\bar{t}_{i+1}=|\bar{t}_{i+1}-\bar{t}_i|$代表随着步长的减小，每种步长相对前一种步长所带来的平均计算时间增加量；$\Delta\bar{\varepsilon}_{i+1}/\Delta\bar{t}_{i+1}=|\bar{\varepsilon}_{i+1}-\bar{\varepsilon}_i|/|\bar{t}_{i+1}-\bar{t}_i|$代表随着步长的减小，每种步长相对前一种步长所带来的平均计算误差减少量与平均计算时间增加量比值，即由于步长减少所带来的计算精度提高与所消耗计算时间代价的比值，该比值越大表明所采取步长的计算收益和效率越高。从表 8 中可以看出，在本研究选取的 6 种步长中，计算步长取 0.01 时，$\Delta\bar{\varepsilon}_{i+1}/\Delta\bar{t}_{i+1}$最大，即步长取 0.01 所带来的计算收益和效率最高。

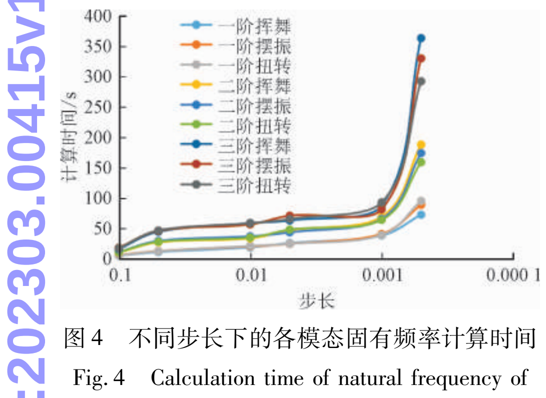


图 4　不同步长下的各模态固有频率计算时间

Fig. 4　Calculation time of natural frequency of each mode under different steps

表 8　步长减小对计算误差与计算时间的影响分析

Tab. 8　Analysis of the influence of step size reduction on calculation accuracy and calculation time

s_i	$\bar{\varepsilon}_i$	$\bar{t}_i$	Δs_{i+1}	$\Delta\bar{\varepsilon}_{i+1}$	$\Delta\bar{t}_{i+1}$	$\frac{\Delta\bar{\varepsilon}_{i+1}}{\Delta\bar{t}_{i+1}}$
0.1	7.9	9.9				
0.05	6.03	27.36	0.05	1.87	17.46	0.11
0.01	3.49	36.56	0.04	2.54	9.2	0.28
0.005	3.22	44.58	0.005	0.27	8.02	0.03
0.001	3.17	63.05	0.004	0.05	18.47	0.003
0.000 5	3.12	195.01	0.000 5	0.05	131.96	0.000 4

综合表 2 ~ 表 8 和图 3 ~ 图 4 的分析结果，本研究选用 0.01 作为基本迭代步长开展后续旋翼轴心运动轨迹计算。

3.2　刚性旋翼的轴心运动轨迹预测

将旋翼视为刚性时，在已知旋翼各模态响应的状态下，下面将计算刚性旋翼在低速状态（桨尖速度为 198.12 m/s）和高速状态（桨尖速度为 365.76 m/s）下的桨毂轴心轨迹，分析旋翼桨毂的运动情况。

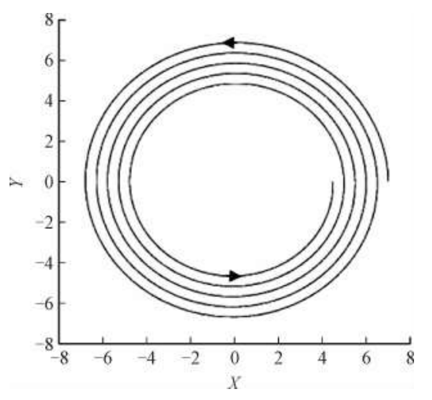


图 5　低速状态刚性旋翼（收敛的）轴心运动轨迹

Fig. 5　Axis trajectory of rigid rotor (convergent) at low speed

图 5 中横纵坐标分别表示桨毂轴心的在 2 个方向上相对偏移量，计算数据均已使用桨叶弦长数据相除进行量纲归一化处理（图 6 ~ 图 8 同）。分析得知，在低速状态条件下，启动一段时间后直升机刚性旋翼轴心运动为一近圆轨迹，且有不断向稳态点运动的趋势，证明此时旋翼轴心运动趋于收敛，机体结构稳定。

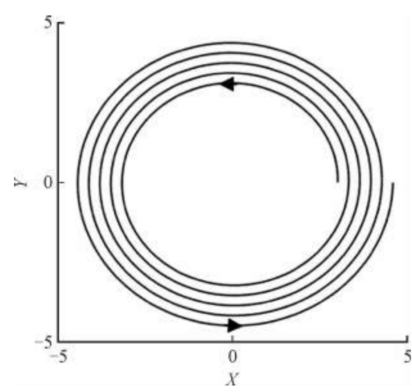


图 6　高速状态刚性旋翼（发散的）轴心运动轨迹

Fig. 6　Axis trajectory of rigid rotor (divergent) at high speed

如图 6 所示，在高速状态条件下，刚性旋翼轴心运动轨迹为一发散的近圆形，桨毂有偏离起点的趋势，说明此时直升机结构出现风险，将产生旋翼的结构损伤，可能引起严重事故。

3.3　柔性旋翼的轴心运动轨迹预测

将旋翼视为柔性时，在已知旋翼各模态响应的状态下，下面将计算柔性旋翼在低速状态（桨尖速度为 198.12 m/s）和高速状态（桨尖速度为 365.76 m/s）下的桨毂轴心轨迹，分析旋翼桨毂的运动情况。

从图 7 可以看出，在低速状态条件下，柔性旋翼由于 X 向和 Y 向阻尼刚度不同，桨毂轴心的整体俯视图呈现出近似椭圆形，其半长轴和半短轴随着时

间推移逐步减小且趋于几何中心，证明此时旋翼轴心运动趋于收敛，机体结构稳定。

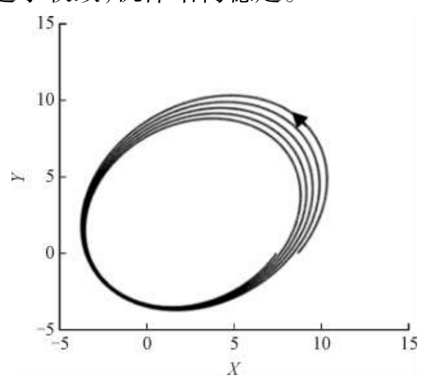


图 7　低速状态柔性旋翼(收敛的)轴心运动轨迹

Fig. 7　Axis trajectory of flexible rotor (convergent) at low speed

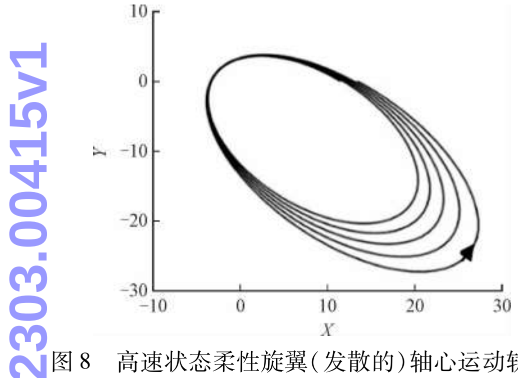


图 8　高速状态柔性旋翼(发散的)轴心运动轨迹

Fig. 8　Axis trajectory of flexible rotor (divergent) at high speed

从图 8 可以看出，在高速状态条件下，柔性桨毂轴心的运动轨迹呈现出狭长的椭圆形，且极远点不断远离几何中心，呈现幅度越来越大的回转现象，此时旋翼结构不稳定，有解体风险。

4　总　结

1)针对 Johnson 倾转旋翼机不平衡载荷前飞动力学模型，推导了直升机旋翼弹性阻尼和惯性力综合作用时桨叶的挥舞和摆振运动方程，并利用叠加原理得到了桨毂轴心运动方程，给出了直升机旋翼的轴心运动轨迹求解流程。

2)以某型直升机旋翼系统为例，验证了本研究所提出旋翼桨叶模态分析方法的准确性；从固有频率计算误差和计算时间的角度出发，给出了计算效率最佳的求解步长选取方法。

3)预测了典型飞行状态下的桨毂轴心运动轨迹，为直升机旋翼系统设计提供基础方法和评估手段。

参考文献

[1] REED W H. Review of propeller-rotor whirl flutter[J]. Journal of sound and vibration, 1966,4(3):526-530.

[2] PETERS D A, HOHENEMSER K H. Application of the floquet tansition matrix to problems of lifting rotor stability[J]. Journal of the American helicopter society,1971,16(2):25-33.

[3] NIXON M W. Aeroelastic response and stability of tiltrotors with elastically-coupled composite rotor blades[D]. Maryland: University of Maryland,1993.

[4] 王浩文,高正. 采用综合气弹分析方法的旋翼非定常气动载荷计算[J]. 南京航空航天大学学报,2003,35(3):268-272.
WANG Haowen, GAO Zheng. Unsteady rotor airload prediction using a comprehensive aeroelastic analysis[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics,2003,35(3):268-272(in Chinese).

[5] 胡国才,向锦武,张晓谷. 前飞状态直升机旋翼/机体耦合动稳定性分析模型[J]. 航空学报,2004,25(5):451-455.
HU Guocai, XIANG Jinwu, ZHANG Xiaogu. An analytical model of coupled rotor/airframe helicopter dynamic stability in forward flight [J]. Acta aeronautica et astronautica sinica,2004,25(5):451-455 (in Chinese).

[6] 薛海峰,向锦武,张晓谷. 直升机前飞空中共振稳定性和各自由度相互作用研究[J]. 航空学报,2005,26 (4):454-457.
XUE Haifeng, XIANG Jinwu, ZHANG Xiaogu. Investigation of helicopter air resonance dynamic stability in forward flight and mutual excitation of different degrees of freedom[J]. Acta aeronautica et astronautica sinica,2005,26(4):454-457 (in Chinese).

[7] 王红州,张兵,刘焜,等. 无轴承旋翼气弹动力学多目标减振优化[J]. 应用力学学报,2015,32(1):158-162.
WANG Hongzhou, ZHANG Bing, LIU Kun, et al. The aeroelastic dynamics multi-objective optimization for vibration reduction of bearingless rotor[J]. Chinese journal of applied mechanics,2015, 32(1):158-162 (in Chinese).

[8] 李其汉,陈志英,张大林. 螺旋桨桨叶试验模态分析[J]. 航空动力学报,1991,6(4):337-341.
LI Qihan, CHEN Zhiying, ZHANG Dalin. Experimental modal analysis of propeller blades[J]. Journal of aerospace power, 1991, 6 (4):337-341 (in Chinese).

[9] 夏品奇,徐桂祺. 直升机模型桨叶颤振试验研究[J]. 航空动力学报,1997,12(1):6-8.
XIA Pinqi, XU Jiaqi. An experimental investigation on flutter of a helicopter blade model[J]. Journal of aerospace power, 1997, 12 (1):6-8 (in Chinese).

[10] JOHNSON W. Helicopter theory[M]. New York: Dover Publications,1994.

[11] JOHNSON W. Wake model for helicopter rotors in high speed flight:177507[R]. New York: NASA CR,1988.

[12] PROUTY R W. 直升机性能及稳定性和操纵性[M]. 北京:航空工业出版社,1990.

[13] GUNJIT B, INDERJIT C. Advanced rotorcraft code: Theory manual [M]. Maryland: University of Maryland,1994.

[14] 李治权,夏品奇. 倾转旋翼机回转颤振及桨毂中心运动图像[J]. 中国科学:技术科学,2014,44(3):286-294.
LI Zhiquan, XIA Pinqi. Whirl flutter and rotor hub center's motion image of tiltrotor aircraft [J]. Science China: technological sciences,2014,44(3):286-294 (in Chinese).

(编辑　李坤璐)